

Úhly v kružnici (metodický průvodce souborem pomůcek pro výuku vlastností úhlů v kružnici)

Pavel Leischner

Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích

leischne@pf.jcu.cz

Seznámíme se s různými způsoby výuky učiva o vlastnostech úhlů v kružnici za podpory dynamické geometrie. V příloze jsou poskytnuty příslušné pomůcky - soubory vytvořené v Cabri geometrii. Text je zpracován jen jako základní informace. Nerad bych omezoval tvořivost učitele. Proto předpokládám, že detailní postup uživatel přizpůsobí svému stylu výuky a konkrétním cílům. Může si také upravit i jednotlivé pomůcky (soubory v programu Cabri), aby lépe vyhovovaly jeho konkrétním potřebám. K souborům lze například vytvořit pracovní listy pro samostatnou práci žáků.

Záměrně jsem do textu nevlozil hypertextové odkazy na pomůcky. Doporučuji vytisknout text a použít jej jako průvodce při práci přímo s pomůckami.

Metodika je prováděna za předpokladu, že nemáme k dispozici interaktivní tabuli. Při použití interaktivní tabule postupujeme analogicky. Postup se však zjednoduší, protože nemusíme užívat tlačítka označená S a popisy útvarů s dalšími zápisy provádíme přímo na tabuli.

1. Odvození věty o obvodových úhlech klasickou metodou

Větu lze zformulovat takto:

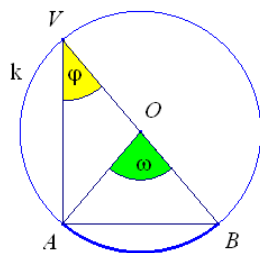
Věta 1. *V libovolné kružnici jsou obvodové úhly příslušné témuž oblouku AB navzájem shodné a jejich velikost je rovna polovině velikosti odpovídajícího středového úhlu.*

Při označení podle obr. 1 platí

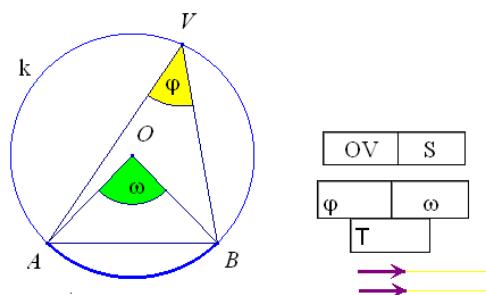
$$\omega = 2\varphi. \quad (1)$$

Soubor 01 EUKLID.fig slouží k odvození vztahu (1) klasickým způsobem, který je znám již z Eukleidových Základů (Základy, věta III.20 včetně důkazu).

Situaci po otevření souboru znázorňuje obr. 1. Klepnutím na tlačítka označená písmeny φ a ω zobrazujeme (resp. skrýváme) aktuální velikosti obvodového a středového úhlu. Úchopem kružnice k měníme její velikost. Pohybováním body A , B lze měnit



Obr. 2



Obr. 1

polohu a velikost oblouku AB .

Při pohybování bodem V po

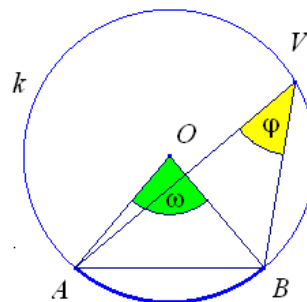
oblouku sledujeme hodnoty φ a ω pro různé oblouky AB a dospějeme k hypotéze, že platí rovnost (1), kterou můžeme na monitoru zobrazit pomocí tlačítka T. Hypotézu dokážeme nejprve pro situaci, kdy střed O leží na jednom z ramen úhlu. Nastavíme bod V například do polohy znázorněné na obr. 2. Společně se studenty zjistíme, že platí $|AO| = |BO| = |VO| = r$, kde r je poloměr dané

kružnice¹. Odtud $|\angle VAO| = |\angle AVO| = \varphi$ a podle věty o vnějším úhlu aplikované na trojúhelník AOV platí (1). Neznají-li žáci větu o vnějším úhlu trojúhelníku, mohou provést výpočet:

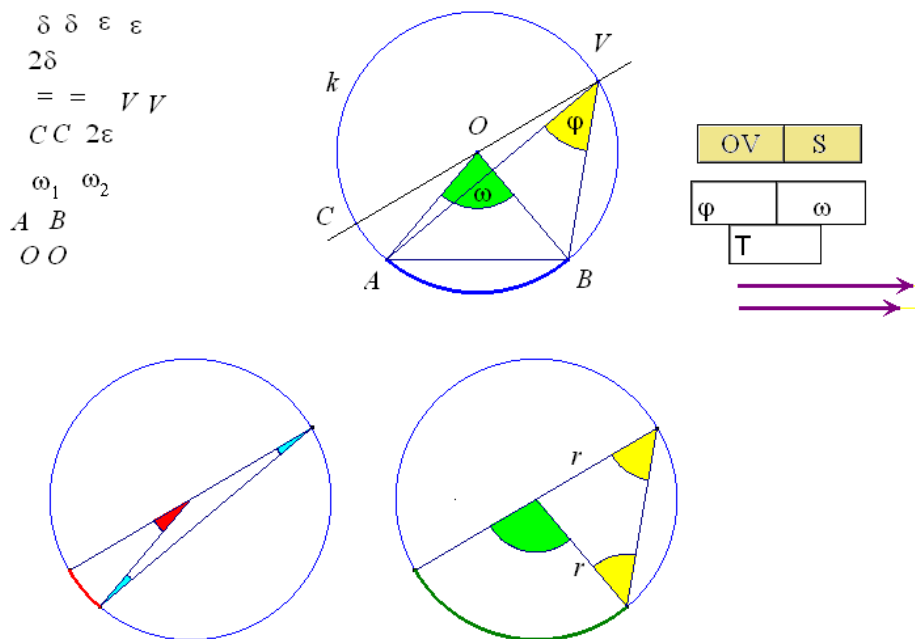
$$180^\circ - \omega = |\angle AOV| = 180^\circ - (|\angle VAO| + |\angle AVO|) = 180^\circ - 2\varphi \Rightarrow \omega = 2\varphi.$$

Ostatní možné situace převedeme na superpozici dvou situací předchozích. Postup zde popíšeme jen pro nepříjemnou situaci, kterou představuje obr. 3.

Klepnutím na tlačítko OV nejprve zobrazíme přímku OV . Dále pak pohybem koncových bodů vektorových ovladačů ve směru naznačeném šipkami vektorů přemístíme pod původní obrázek jeho dvě kopie, z nichž každá je upravena tak, aby představovala právě jednu ze situací předchozího typu. Kopie umístíme, aby byly kružnice vedle sebe² (obr. 4). Tlačítkem S nakonec zobrazíme písmena, která jsou skryta v levé horní části obrazovky. Tato písmena může žák přemísťovat a doplnit jimi správné označení na dolních dvou obrazcích (obr. 5).



Obr. 3



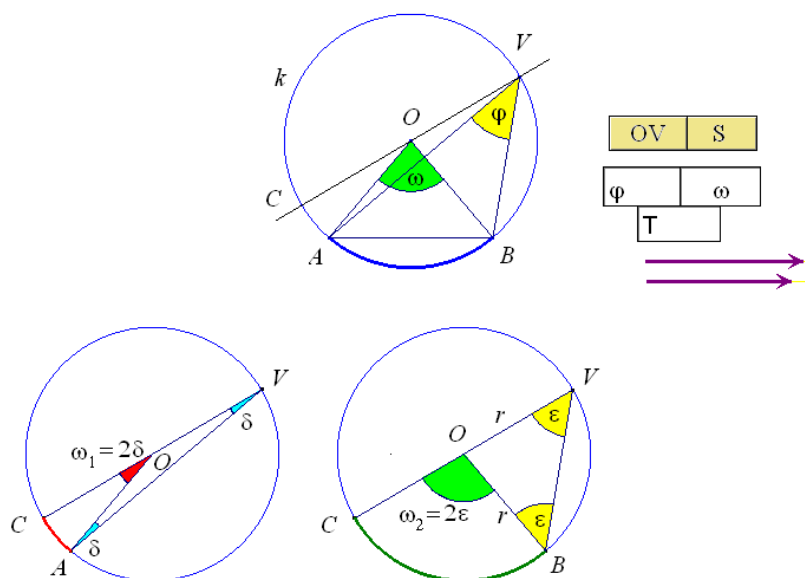
Obr. 4

¹ Pro větší názornost můžeme pomocí tlačítka S zobrazit symboly, ze kterých písmena „r“ přemístíme k úsečkám OA , OB a OV .

² Poznamenejme, že posunutím koncových bodů ovladačů doprava až na doraz, splynou obě kopie do jediné kružnice, kterou lze úchopem za její střed přemístit nahoru tak, aby se kryla s původní kružnicí. Tím se vizuálně přesvědčíme, že superpozice obou dílčích obrázků vede k původnímu obrázci.

Po tomto doplnění (obr. 5) může žák sestavit důkaz:

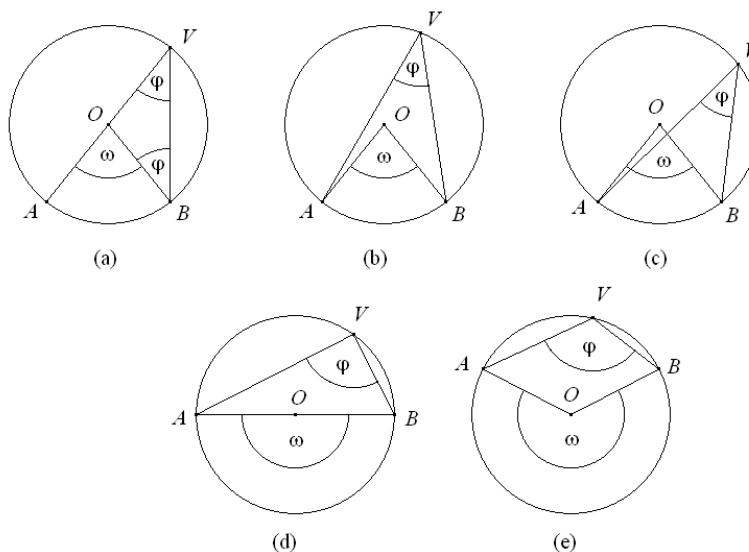
$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2\delta \\ \omega_2 &= 2\varepsilon \end{aligned} \quad \wedge \quad \omega = \omega_2 - \omega_1 \Rightarrow \omega = 2(\varepsilon - \delta) = 2\varphi.$$



Obr. 5

Pokud pokládáme uvedený postup za příliš zdlouhavý, můžeme tlačítko S zrušit, dopsat chybějící označení v dolních obrázcích (užijte prostředí „Názvy“) a soubor uložit pod vhodným označením. Takto upravenou pomůcku lze využívat například k názorné demonstraci učitelova výkladu.

Pro úplné ověření vztahu (1) by žáci měli analogicky prozkoumat ještě zbývající tři z pěti situací znázorněných na obr. 6.

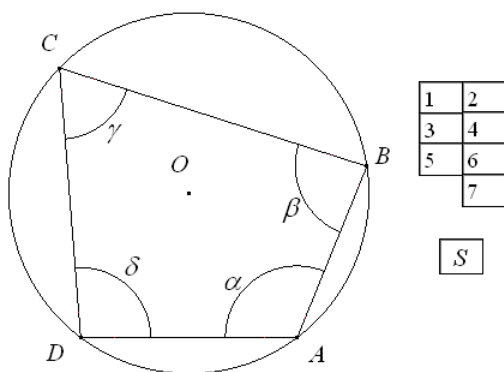


Obr. 6

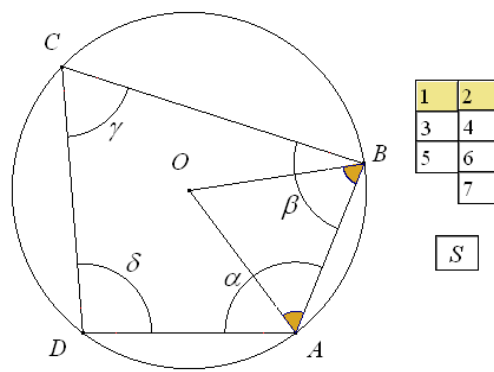
2. Tětivový čtyřúhelník.

Využití těchto pomůcek podávám jako návod na možnou frontální práci s žáky. Pomůcku si může učitel různě upravit. Například pro samostatnou práci žáků doplněním pracovního listu. Nejprve odvodíme větu o úhlech tětivového čtyřúhelníku.

Na obr. 7 vidíme situaci po otevření souboru 02 TETIVCTYR.fig . Pomocí tlačítek 1 a 2 zobrazíme trojúhelník AOB a jeho vnitřní úhly při straně AB (obr. 8). Požadujeme utvořit hypotézu o vzájemné velikosti těchto úhlů. Žáci by měli objevit, že $r = |OA| = |OB|$ a odtud $|\angle OAB| = |\angle OBA|$. Tlačítkem S můžeme zobrazovat a skrývat symboly potřebné k označování a psaní zápisů, které lze myší přemísťovat. Z nich například vybereme dvě písmena „r“ a použijeme k označení délek úseček OB , OA .



Obr. 7

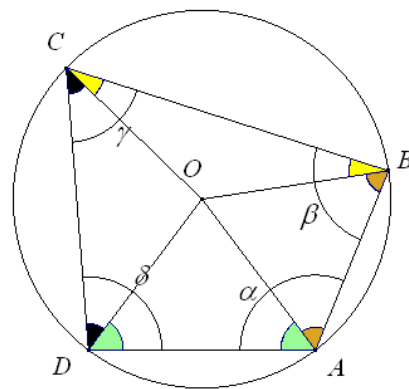


Obr. 8

Pomocí tlačítek 3 až 7 analogicky zobrazíme úsečky OC , OD a úhly ve vzniklých trojúhelnících. Ujasníme si, že úhly vyznačené stejnou barvou jsou stejně velké (obr. 9). Velikosti těchto úhlů označíme počátečními písmeny příslušných barev (z – zelená, h – hnědá, $ž$ – žlutá $č$ – černá) a hledáme souvislost s velikostmi úhlů α , β , γ , δ . Postupně zjistíme

$$\alpha + \gamma = (z + h) + (\check{z} + \check{c}) = (h + \check{z}) + (z + \check{c}) = \beta + \delta.$$

Využijeme ještě podmínku $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$ a výsledky shrneme do vztahu



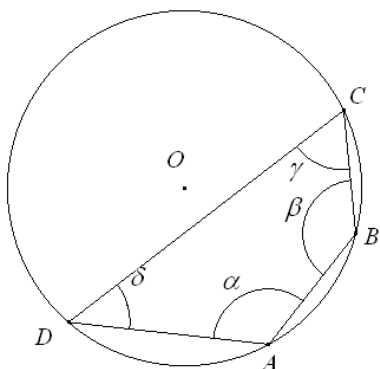
Obr. 9

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi, \quad (2)$$

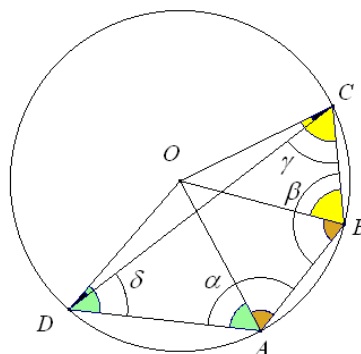
který jsme odvodili za předpokladu, že střed O kružnice čtyřúhelníku opsané je ve čtyřúhelníku obsažen. Abychom vztah dokázali i pro ostatní možné situace, soubor bez ukládání zavřeme a znovu jej otevřeme. Nastavíme situaci, kdy je bod O vně čtyřúhelníku a

celý postup zopakujeme. Při počátečním nastavení podle obr. 10 je závěrečná situace znázorněna obrázkem 11 a platí

$$\alpha + \gamma = (z + h) + (\check{z} - \check{c}) = (h + \check{z}) + (z - \check{c}) = \beta + \delta.$$



Obr. 10

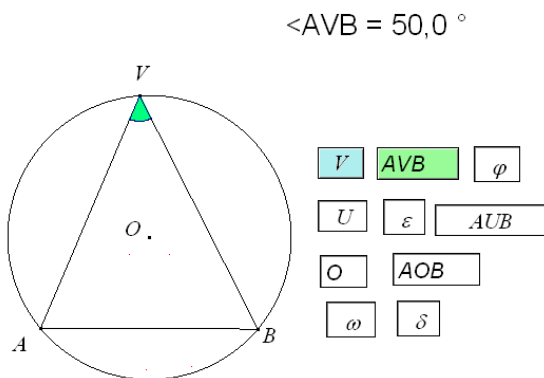


Obr. 11

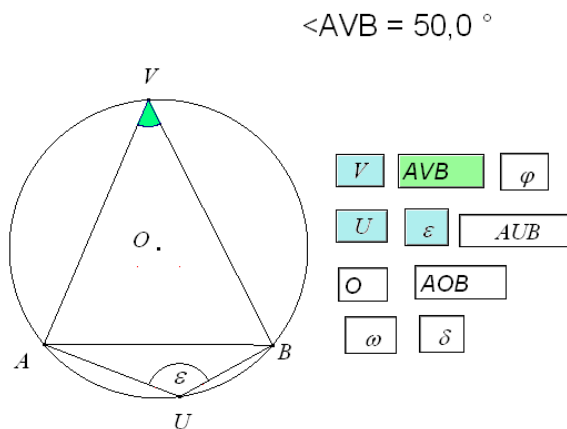
Výsledek shrneme do věty:

Věta 2. V tětiovém čtyřúhelníku je součet velikostí protilehlých úhlů roven π .

3. Věta o obvodových úhlech jako důsledek vlastností tětiového čtyřúhelníku.



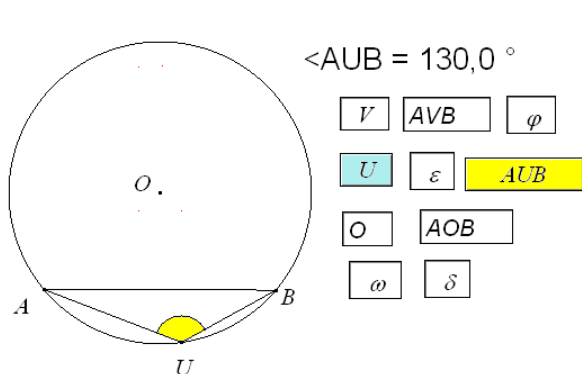
Obr. 12



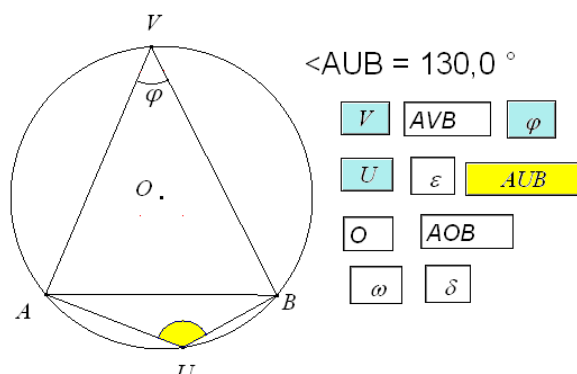
Obr. 13

Na obr. 12 vidíme situaci po otevření souboru 03 OBVUHLÝ 2.fig. Při pohybu bodu V po oblouku zůstává aktuální hodnota úhlu AVB stále stejná. Při změnách polohy bodů A, B se mění. Přijde někdo z žáků na to, proč tomu tak je? Pokud ne, zobrazíme pomocí tlačítek U a ε trojúhelník ABU s vrcholem U na protilehlém oblouku AB. Po této nápovědě by se měli žáci dovědět, že je v tětiovém čtyřúhelníku AUBV velikost úhlu AVB nezávislá na poloze bodu V uvnitř horního oblouku AB, neboť platí $|AVB| = \pi - \varepsilon$.

Dále pomocí tlačítek V, AVB, ε , AUB nastavíme situaci na obr. 14 a předchozí postup zopakujeme pro zaměněné oblouky. (Od pohybu bodu U po dolním oblouku AB se sledováním hodnot velikosti úhlu AUB až k situaci na obr. 15 a rovnici $|AUB| = \pi - \varphi$.)

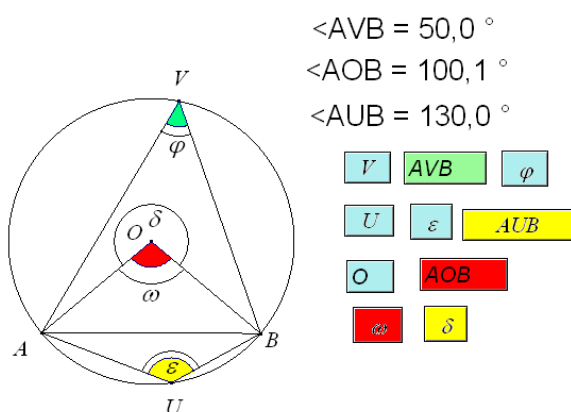


Obr. 14

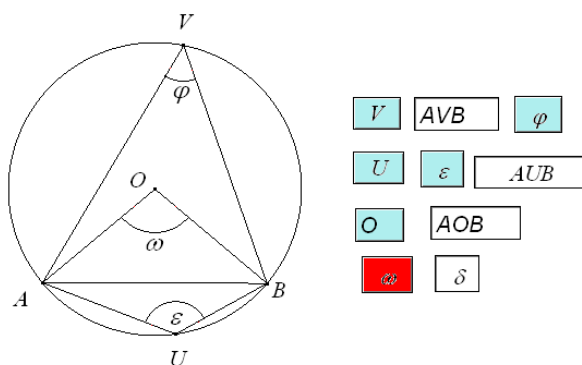


Obr. 15

Zbývá nám dokázat platnost vztahu (1). K vytvoření hypotézy $\omega = 2\varphi$ a $\delta = 2\varepsilon$ můžeme použít nastavení podle obr. 16.



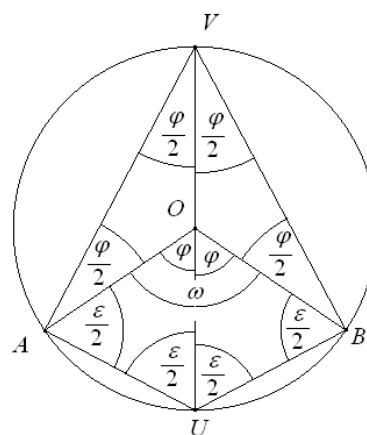
Obr. 16



Obr. 17

Pro vlastní důkaz vztahu (1) upravíme obrázek podle obr. 17 a vyzveme žáky, aby našli takové polohy bodů V a U , které by umožnily snadno vyjádřit ω pomocí φ (resp. δ pomocí ε). Jednu z možností známe z obr. 6 (a), je však možné, že žáky napadne zvolit U a V ve středech oblouků (viz obr. 18).

Poznámka. Postup byl motivován bavorskou gymnaziální učebnicí Ernst (1971).



Obr. 18

4. Odvození věty 1 s využitím vlastností os tětiv

Osa OC tětivy AV na obr. 19 rozděluje oblouk AV na dva (osově souměrné a proto) shodné oblouky AC a CV . Analogicky osa OD tětivy BV rozděluje oblouk BV na dva shodné oblouky BD a DV . Z těchto faktů plyne, že velikost δ úhlu COD je polovinou velikosti toho z úhlů AOB , který obsahuje bod V a proto je pro daný oblouk AB konstantní. Oblouk AVB má velikost 2δ , a tak při označení podle obr. 19 platí

$$\omega + 2\delta = 2\pi. \quad (3)$$

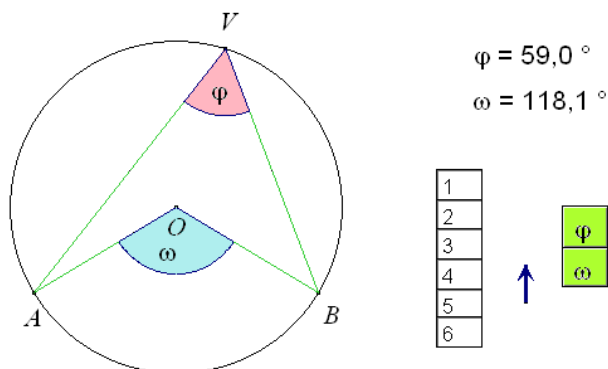
V dané rovině jsou úhly kolmic ke dvěma různoběžkám shodné s úhly těchto různoběžek. Odtud a z obr. 19 dostáváme $|\angle BVM| = \delta$ a $\varphi + \delta = \pi$, resp.

$$2\varphi + 2\delta = 2\pi. \quad (4)$$

Tím je věta o obvodových úhlech dokázána, neboť z rovností (3) a (4) plyne (1).

Poznamenejme ještě, že vztah (4) plyne též z podmínky pro součet velikostí vnitřních úhlů čtyřúhelníku $POQV$, kde P, Q jsou středy tětiv AV a BV (a tedy i paty kolmic ze středu kružnice na tyto tětivy).

K demonstraci uvedeného postupu můžeme použít soubor 04 OSY TĚTIV. Situaci po jeho otevření představuje obr. 20. Pohybem koncového bodu vektorového ovladače měníme polohu bodů A, B . Tlačítka označená písmeny φ a ω skrývají nebo zobrazují aktuální velikosti obvodového a středového úhlu. Pomocí tlačítek 1 až 6 postupně zobrazujeme nebo skrýváme osy OC a OD , barevné vyznačení oblouků CV, DV, AC a BD , úhly velikosti δ a stručný zápis výše uvedeného výpočtu. Případné úpravy pomůcky a rozpracování metodiky jejího použití přenechávám uživateli.



Obr. 20

Poznámka. K tomuto postupu mne inspiroval Lietzmann (1935) a bavorská gymnaziální učebnice Kratz (1973), v níž je však výklad podán jako důsledek věty o skládání dvou

osových souměrností s navzájem různoběžnými osami. (Viz též Kuřina (2002).) Walther Lietzmann byl významný německý didaktik matematiky v první polovině 20. století. Promoval v roce 1904 u Davida Hilberta. Od roku 1919 až do svého odchodu do důchodu (v roce 1946) byl ředitelem gymnázia v Göttingen (dnešní Gymnázium Felixe Kleina). Od roku 1920 byl odborným asistentem a od roku 1934 čestným profesorem exaktních věd na univerzitě v Göttingen. Byl hodně zapojen do programu Felixe Kleina - reformy vyučování matematiky na středních školách. Napsal několik pěkných matematických publikací pro středoškoláky. Jeho *Pythagorova věta* z roku 1911 je dodnes svěžím dílkem, které okouzlí čtenáře i po 100 letech. Ruský překlad obou Lietzmannových publikací je volně ke stažení z elektronické knihovny **math.ru**: <http://www.math.ru/lib/>

5. Věta o úhlech tětiv

Následující větu 3 budeme nazývat *věta o úhlech tětiv*. Představuje zobecnění věty o obvodových úhlech. V některých zemích se na středních školách používá jako efektivnější nástroj k řešení úloh, v nichž se vyskytují úhly v kružnici. Ukážeme si nejprve její klasický důkaz, jak jej uvedl Hadamard (1906) a jak se i dnes všeobecně uvádí. Výhody využití věty ukážeme v řešených úlohách odstavce 7. Odstavec 8 představuje větu o obvodových úhlech jako speciální případ věty o úhlech tětiv a v odstavci 9 se seznámíme s větou o úhlech sečen, která je zobecněním věty 3.

Velikost středového úhlu, který přísluší oblouku AB , budeme nazývat úhlová velikost oblouku AB a značit ω_{AB} .

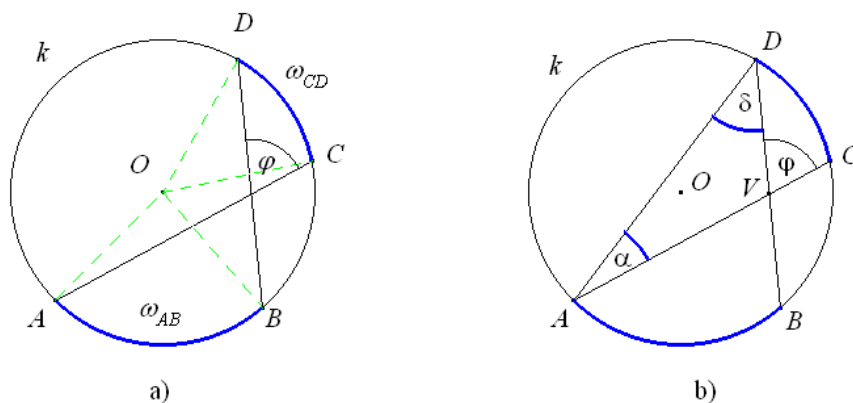
Věta 3. Mají-li dvě různoběžné tětivy kružnice společný bod, pak velikost úhlu jimi sevřeného je aritmetickým průměrem úhlových velikostí příslušných oblouků tětivami ohraničených.

Při označení podle obr. 21 a) to znamená, že platí

$$\varphi = \frac{\omega_{AB} + \omega_{CD}}{2}, \quad (5)$$

resp.

$$\omega_{AB} + \omega_{CD} = 2\varphi. \quad (6)$$



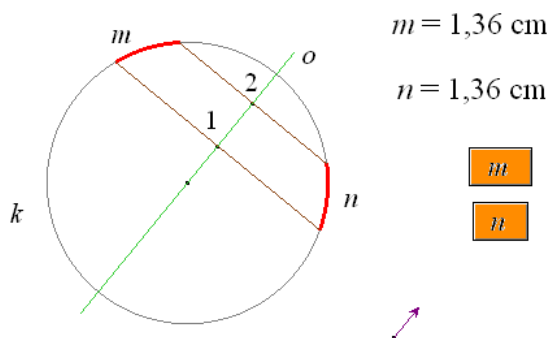
Obr. 21

Důkaz. Necht' se tětivy AC a BD protínají v bodě V a svírají úhel CVD velikosti φ , obr. 21 b), který je současně vnějším úhlem trojúhelníku AVD . Podle věty o vnějším úhlu (a při označení podle obrázku) platí $\alpha + \delta = \varphi$, tedy i $2\alpha + 2\delta = 2\varphi$. Odtud po substituci $2\alpha = \omega_{AB}$ a $2\delta = \omega_{CD}$, která plyne z věty o obvodových úhlech, dostáváme vztah (6), resp. (5).

6. Odvození věty o úhlech tětiv ze symetrie kružnice

Na obr. 22 vidíme soubor 05 KRUHOVÝ PÁS.fig³ po otevření. Soubor je pomocný. Slouží k názorné demonstraci známých (a pro další úvahy potřebných) vlastností rovnoběžných tětiv:

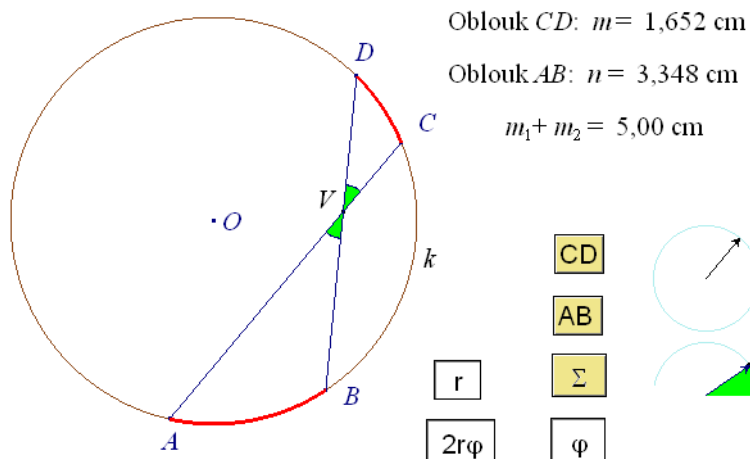
Rovnoběžné tětivy kružnice mají společnou osu souměrnosti, která prochází středem kružnice. Podle této osy o je tedy souměrná i kružnice k . Odtud pak plyne souměrnost (a tedy shodnost) oblouků mezi tětivami (tzn. červených oblouků na obrázku).



Obr. 22

Tlačítka m , n slouží ke zobrazení a skrytí aktuálních délek oblouků. Pomocí vektorového ovladače měníme společný směr tětiv při zachování jejich rovnoběžnosti. Sečnu lze posouvat po uchopení za bod 1 (resp. za bod 2). Při jakýchkoliv změnách polohy a směru tětiv žák pozoruje, že délky oblouků mezi tětivami si jsou pokaždé rovny. Na otázku „Proč?“ by měl přijít na zdůvodnění pomocí osové souměrnosti.

³ Termín *kruhový pás* užívám pro označení rovinného útvaru ohraničeného kružnicí a jejími dvěma rovnoběžnými tětivami. Je to rovinná analogie tzv. kulové vrstvy (tělesa ohraničeného kulovou plochou a dvěma rovnoběžnými rovinami, které ji protínají).



Obr. 23

Na obr. 23 vidíme soubor 06 OBLOUKY 1.fig po otevření. Soubor slouží k průzkumu situace se dvěma různoběžnými tětivami. resp. k vytvoření hypotézy, že

Součet délek oblouků AB a CD se nemění při posouvání sečny AC za předpokladu, že tětivy AC a BD stále mají společný bod V (to znamená že průsečík sečen AC a BD neleží vně kruhu ohraničeném danou kružnicí). Totéž platí i pro posouvání sečny BD .

Nejprve zkoumáme délky oblouků pro různé polohy tětiv při pevně nastaveném úhlu φ .

Bodem V lze pohybovat a s ním se posouvají i tětivy. Jejich úhel nastavujeme pohybem bodu na půlkružnici ovladače umístěného vpravo dole. Pomocí kruhového ovladače nad ním otáčíme sečnami kolem bodu V (uchopte koncový bod vektoru ovladače). Čtyři tlačítka v prostředním sloupci zobrazují a skrývají aktuální délky m , n oblouků CD , AB , součet těchto délek a velikost φ zeleně vyznačeného úhlu tětiv (ve stupních i v radiánech). Tlačítko r zobrazuje aktuální velikost poloměru a tlačítko $2r\varphi$ zobrazí aktuální hodnotu výrazu $2r\varphi$.

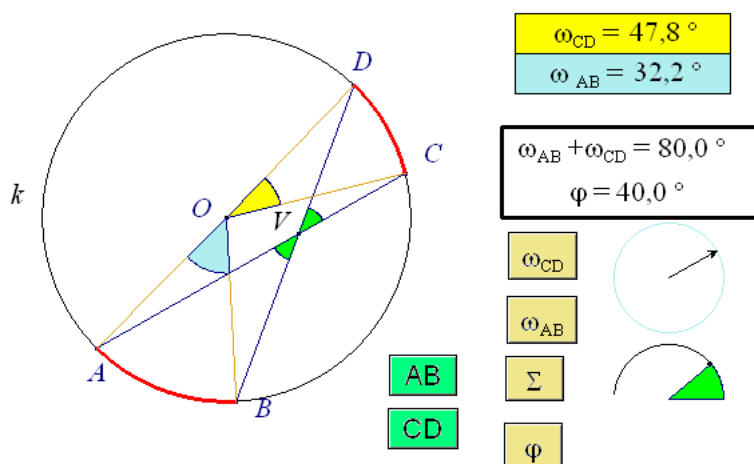
Na základě experimentů dojdeme k hypotéze, že součet délek oblouků AB a CD nezávisí při pevně nastaveném poloměru kružnice a úhlu φ na poloze tětiv (pokud ovšem průsečík sečen AC a BD neleží vně kruhu). Použitím tlačítka $2r\varphi$ můžeme prozradit, že platí

$$m + n = 2r\varphi, \quad (7)$$

neboli

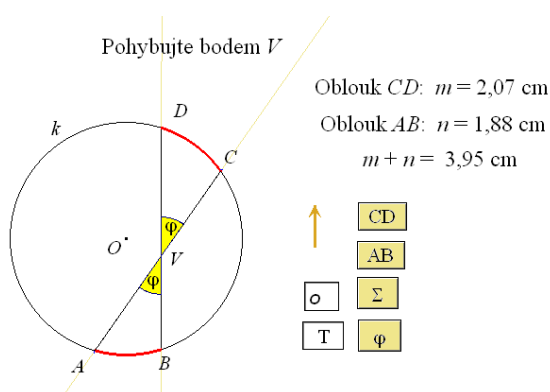
$$r\omega_{AB} + r\omega_{CD} = 2r\varphi.$$

Vydělením poslední rovnice poloměrem r dostaneme vztah (6). K demonstraci platnosti vztahu (6) můžeme použít soubor 06 ÚHLÝ 1.fig (obr. 24), který je prakticky stejný jako soubor 06 OBLOUKY 1.fig. Jediný rozdíl je v tom, že místo délek oblouků zobrazuje velikosti úhlů. Tlačítka AB a CD navíc umožňují zobrazovat a skrývat velikosti středových úhlů oblouků.

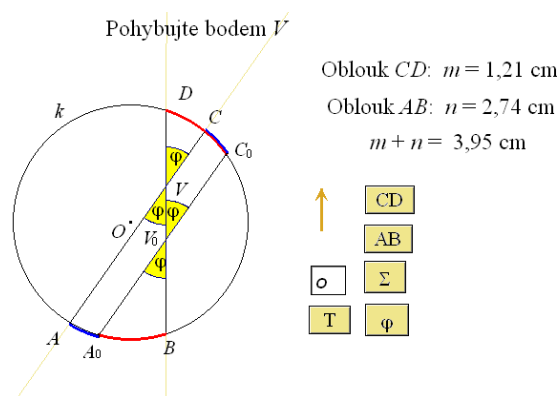


Obr. 24

K vlastnímu důkazu vztahu (7) použijeme soubor 07 OBLOUKY 2.fig. Po jeho otevření vidíme situaci na obr. 25⁴. Podle zobrazeného pokynu uchopíme bod V, jehož poloha je vázána na úsečku BD, a pohybujeme jím například směrem vzhůru. Během pohybu se vykreslují modře vyznačené oblouky trajektorie bodů C, A (obr. 26). Tlačítkem T zobrazíme označení A_0 a C_0 počátečních poloh bodů A a C. Protože jsou oblouky AA_0 a CC_0 shodné, zkrátí se pohybem délka původního oblouku CD o tutéž hodnotu, o jakou se délka oblouku AB prodloužila. Obráceně, při pohybu bodu V opačným směrem, se délka oblouku AB zkracuje a délka oblouku CD prodlužuje opět o stejnou hodnotu.



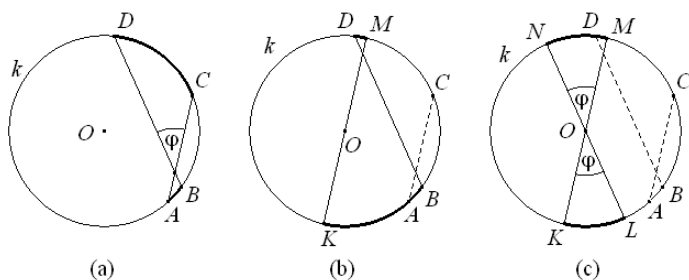
Obr. 25



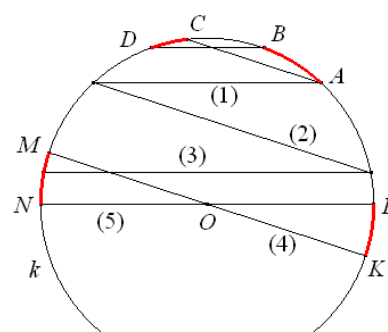
Obr. 26

⁴ Poznamenejme, že uchopením za bod D posouváme obě sečny a uchopením kterékoliv ze žlutých přímek – sečen – otáčíme příslušnou sečnou kolem průsečíku V.

Střídavým posouváním uvedeného typu (viz obr. 27 a obr. 28) lze přemístit tětivy kružnice k .



Obr. 27



Obr. 28

Během posouvání zůstává součet délek oblouků zachován. Když označíme m_{AB} , m_{CD} , m_{KL} a m_{MN} délky oblouků AB , CD , KL a MN a středové úhly příslušné obloukům v daném pořadí ω_{AB} , ω_{CD} , φ a φ , platí

$$m_{AB} + m_{CD} = m_{KL} + m_{MN} \Rightarrow r\omega_{AB} + r\omega_{CD} = r\varphi + r\varphi \Rightarrow \omega_{AB} + \omega_{CD} = 2\varphi.$$

Tím je odvozen vztah (6) a tedy i věta 3. Uvedený postup je jednoduchý a žáci se mohou pomocí dynamické pomůcky názorně přesvědčit o správnosti tvrzení, že AC a BD lze z kterékoliv polohy přemístit do průměrů KM a LN . Matematik by ovšem požadoval přesnější důkaz. Ukážeme si tedy ještě formální důkaz a ponecháme na úvaze učitele, zda je potřebné jej žákům uvádět.

Budeme uvažovat libovolné umístění tětivy AC a BD , které se protínají pod úhlem φ v bodě V a v souladu s obr. 26 (a), (b) označíme KM a LN průměry kružnice k takové, že KM je rovnoběžný s AC a LN rovnoběžný s BD . Při důkazu rozlišíme tyto situace:

1. Necht' se tětivy KM a BD protínají, viz obr. 27 (b). Pak můžeme výše zmíněným posouváním nahradit dvojici tětivy $\{AC, BD\}$ dvojicí $\{KM, BD\}$, aniž by se změnil součet délek odpovídajících oblouků (a tím i součet příslušných středových úhlů). Analogicky pak nahradíme dvojici tětivy $\{KM, BD\}$ dvojicí $\{KM, LN\}$, jak znázorňuje obr. 27 (c), a dospějeme k platnosti vztahu (2).

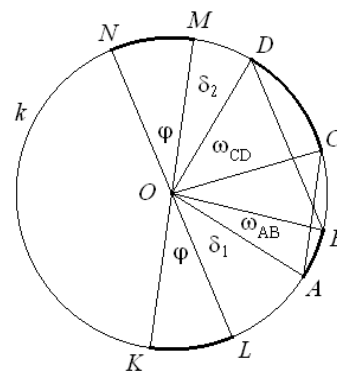
Jestliže se protínají tětivy LN a AC , provedeme důkaz analogicky.

2. Necht' $\{AC, BD\} \cap \{KM, LN\} = \emptyset$.

Označme $\omega_{LA} = \delta_1$ a $\omega_{DM} = \delta_2$, obr. 29. Ze shodnosti oblouků LB , ND a oblouků MC , KA plyne, že součet velikostí středových úhlů příslušných obloukům LB a MC je roven součtu velikostí středových úhlů příslušných obloukům ND a KA . Platí tedy

$$(\delta_1 + \omega_{AB}) + (\delta_2 + \omega_{CD}) = (\varphi + \delta_2) + (\varphi + \delta_1)$$

a odtud plyne (2).



Obr. 29

Polybujte bodem V

$\omega_{CD} = 36,7^\circ$
 $\omega_{AB} = 33,2^\circ$
 $\omega_{AB} + \omega_{CD} = 70,0^\circ$
 $\varphi = 35,0^\circ$

Polybujte bodem V

$\omega_{CD} = 20,3^\circ$
 $\omega_{AB} = 49,6^\circ$
 $\omega_{AB} + \omega_{CD} = 70,0^\circ$
 $\varphi = 35,0^\circ$

↑

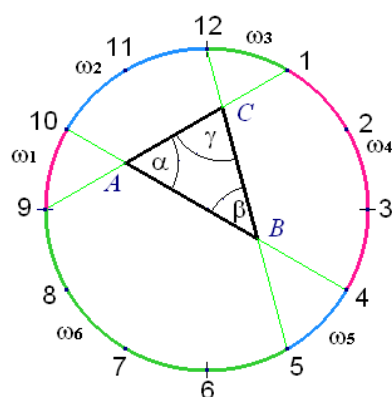
CD	AB
Σ	φ

o T

Obr. 26a

Příklad 1. Na obr. 30 jsou na ciferníku hodin sestrojeny tři přímky, které ohraničují trojúhelník ABC . Určete velikosti vnitřních úhlů α , β a γ trojúhelníku.

Řešení. Ciferník rozděluje hraniční kružnici na 12 shodných oblouků. Každému z nich přísluší středový úhel 30^0 . Dané přímky vytínají na hraniční kružnici ciferníku oblouky, jejichž úhlové velikosti (tzn. středové úhly příslušné obloukům) označíme podle obr. 31.



Obr. 31

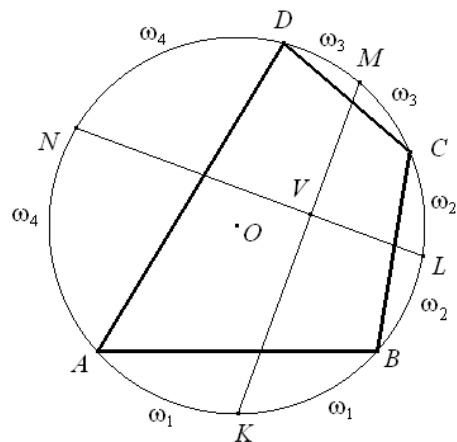
Příklad 2. V tětiovém čtyřúhelníku $ABCD$ jsou písmeny K, L, M, N označeny po řadě středy těch oblouků AB, BC, CD, DA , jejichž vnitřní body neobsahují vrcholy čtyřúhelníku (obr. 32). Dokažte, že platí $KM \perp LN$.

Řešení. Užitím vztahu (6) a při označení podle obr. 32 dostáváme

$$(\omega_1 + \omega_4) + (\omega_2 + \omega_3) = 2|\angle KVN|.$$

Odtud plyne $|\angle KVN| = 90^\circ$,

neboť $2(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) = 360^\circ$.



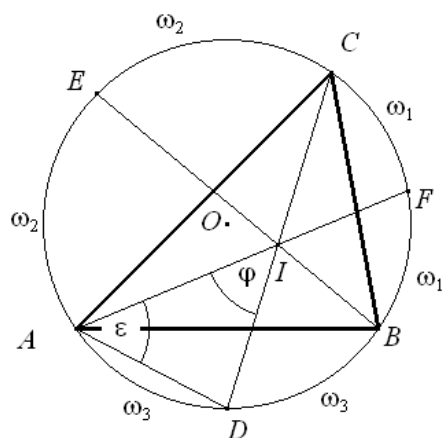
Obr. 32

Příklad 3. Označme I střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC a $D \neq C$ průsečík osy úhlu ACB s kružnicí opsanou trojúhelníku.

Dokažte, že $|DA| = |DI|$.

Řešení. Při označení podle obr. 33 má vztah (6) pro tětivy AF a CD tvar $2\varphi = \omega_1 + \omega_3$. Analogicky pro tětivy AD a AF platí $\omega_1 + \omega_3 = 2\varepsilon$. Z posledních dvou vztahů plyne $\varphi = \varepsilon$, a tak je trojúhelník AID rovnoramenný: $|DA| = |DI|$.

Pozn. Povšimněte si zrakové iluze na obr. 33, kde se úsečka DI jeví delší než AD . Změřením se však můžeme přesvědčit, že jsou obě úsečky shodné.



Obr. 33

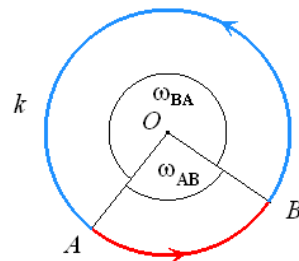
8. Věta o obvodových úhlech jako důsledek věty o úhlech tětiv

Věta o obvodových úhlech je větou o úhlech tětiv pro $C = D$, tzn. pro $V \in k$. K názorné demonstraci můžeme využít soubor 08 OBVUHEL.fig. Na obr. 34 vidíme situaci na monitoru po otevření souboru. Bod V přesuneme podle uvedeného pokynu do bodu D a pomocí tlačítek C, D můžeme případně skrýt označení bodů C, D . Tlačítka 1 až 5 postupně zobrazíme jednotlivé řádky zápisu odvození vztahu (1). Konečnou situaci ukazuje obr. 35.



K souboru ještě poznamenejme, že každou z přímek p , q lze otáčet (úchopem za přímkou) kolem bodu V a tím měnit velikost úhlu φ . Po uchopení za bod D můžeme obě přímky současně posouvat.

Věta o úhlech sečen vznikne sloučením věty 4 a věty 3. Abychom ji mohli zformulovat, zavedeme orientované oblouky a jejich úhlové velikosti. Orientovaný oblouk \overrightarrow{AB} kružnice k budeme definovat jako trajektorii pohybu po kružnici k v kladném smyslu otáčení z A do B . Rozlišujeme tedy pořadí krajních bodů oblouku. Bod A je počáteční a B koncový bod oblouku. Orientované oblouky zde budeme značit tučnou kurzívou. Úhlovou velikostí oblouku \overrightarrow{AB} rozumíme velikost jeho orientovaného úhlu \overrightarrow{AOB} (O je střed kružnice k). Na obr. 38 je modře vyznačen oblouk \overrightarrow{BA} a červeně oblouk \overrightarrow{AB} , ω_{BA} a ω_{AB} jsou jejich základní úhlové velikosti.

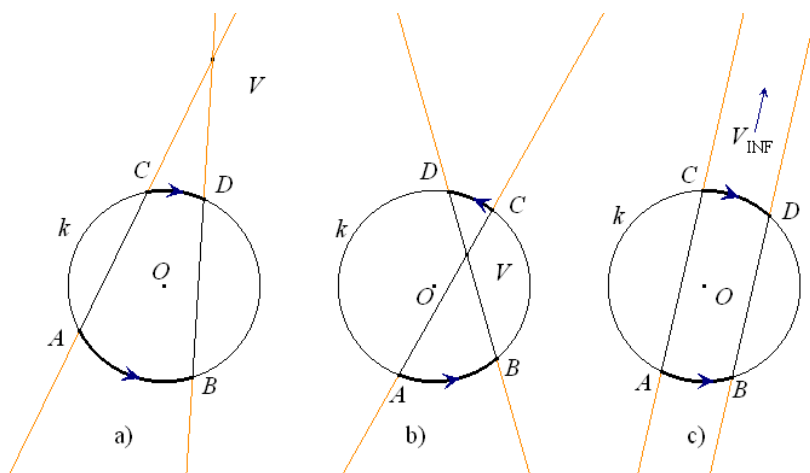


Obr. 38

Věta 5 (Věta o úhlech sečen). Jestliže se přímky, na kterých leží tětivy AC a BD kružnice k protínají v bodě V , pak je velikost orientovaného úhlu \overrightarrow{AVB} aritmetickým průměrem úhlových velikostí orientovaných oblouků \overrightarrow{AB} a \overrightarrow{CD} .

Obrázek 39 ilustruje názorně sloučení všech tří situací, pro něž platí:

$$\omega_{AB} + \omega_{CD} = 2\varphi_{AVB} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (8)$$



Obr. 39

Tučnými písmeny značíme velikosti orientovaných úhlů. Každý orientovaný úhel má nekonečně mnoho velikostí, každé dvě z nich se liší o celistvý násobek čísla 2π (resp. násobek 360° , pokud měříme ve stupních). Proto se na pravé straně výrazu (8) vyskytuje člen $2k\pi$. (Pro základní velikosti můžeme položit $k=0$.) Když počítáme s velikostmi neorientovaných úhlů, nabývá vztah (8) tvar

$$\begin{aligned} \omega_{AB} - \omega_{DC} &= 2\varphi && \text{pro situace a) a c),} \\ \text{resp. tvar} &&& \\ \omega_{AB} + \omega_{DC} &= 2\varphi && \text{pro situaci b).} \end{aligned}$$

Literatura

Bogomolny, A. (2010). Secant Angles in a Circle. *Cut The Knot*.

<http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/SecantAngle.shtml>

Ernst, M. (1971). *Einführung in die Geometrie auf abbildungsgeometrischer Grunagdlege, Teil I*. München: Ehrenwirth Verlag.

Hadamard, J. (1906). *Leçons de géométrie élémentaire - I. Géométrie plane*. Paris: Librairie Armand Colin.

Heath, T. L. (1956). *Euclid's Elements*, New York: Dover Publications.

<http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus:text:1999.01.0086>

Kratz, J. (1973). *Geometrie I*. München: Bayerischer Schulbuch – Verlag - München .

Kuřina, F. (2002). *10 geometrických transformací*. Praha: PROMETHEUS.

Leischner, P. (2004). Cavalieriho princip, věta o krájení pizzy a věta o krájení melounu. (The Cavallieri principle, theorem on portioning a pizza and the theorem on portioning a melon.) *Matematika – fyzika – informatika* **13** (5), 257-264.

Leischner, P. (2010). Inscribed angle theorem. I2GEO

http://i2geo.net/xwiki/bin/view/Coll_leischner/Inscribedangletheorem

Lietzmann, W. (1935). *Altes und neues vom kreis*. Leipzig: B. G. TEUBNER Verlagsgesellschaft.

Ponarin, Y. P. (2004). *Elementarnaya geometria, Tom 1*. Moscow: Izdatelstvo MCNMO.

<http://www.math.ru/lib/book/pdf/geometry/Ponarin-I.pdf>

Ransom, M. (2000). *Circles: Chords and Angles*. Mainland High School: AlgebraLAB

http://www.algebralab.org/lessons/lesson.aspx?file=Geometry_CirclesAnglesChords.xml

Sharygin, I. F. (1982). *Zadachi po Geometrii Planimetria*. Moscow : Nauka.

<http://www.math.ru/lib/cat/geom>

Sharygin, I. F. (1988). *Problems in Plane Geometry*. Moscow : Mir. (v angličtině.)

http://www.goodreads.com/author/show/319104.I_F_Sharygin

Math Warehouse. *Angles of intersecting chords theorem*

<http://www.mathwarehouse.com/geometry/circle/angles-of-intersecting-chords-theorem.php>

McRae, G. (2005) Intersecting Chords - extension of Central Angle Theorem. *Math Help*

<http://2000clicks.com/MathHelp/GeometryTriangleInscribedAngleCircle2.aspx>