OBSAH

Původní odborné články

Příklady, úlohy

Krátké sdělení

CONTENT

Jednota českých matematiků a fyziků

Učitel matematiky

Ročník 27, číslo 4 (113), 2019

POLYVALENTNÍ ÚLOHY V MATEMATICE

LIBUŠE SAMKOVÁ

Úvod

Tento příspěvek se věnuje matematickým úlohám, které jsou otevřené ve smyslu *otevřeného* přístupu k matematice (Nohda, 2000; Pehkonen, 1997), tedy úlohám, které mají alespoň jednu z následujících vlastností:

- existuje více způsobů, jak úlohu uchopit (tj. vstupní situace je otevřená);
- existuje více způsobů, jak úlohu řešit (tj. postup řešení je otevřený);
- existuje více různých řešení (tj. výsledná situace je otevřená);
- existuje více způsobů, jak z úlohy vytvořit úlohu novou (tj. další cesta je otevřená).

Takové úlohy mají ve výuce matematiky široké využití – je možné je uplatnit během přípravné, realizační i hodnotící fáze výuky (Samková, 2018).

Otevřené úlohy mají tradici například v japonském matematickém vzdělávání (Nohda, 2000), žákovská řešení zde bývají hodnocena podle následujících kritérií:

- kolik různých řešení nebo postupů řešení je žák schopen předložit;
- kolik různých matematických myšlenek žák při řešení použil či objevil;
- do jaké míry je žákovo myšlení originální;
- do jaké míry je žákovo myšlení elegantní.

Mezi otevřenými úlohami s více různými řešeními zaujímají speciální postavení tzv. *polyvalentní* úlohy, jejichž jednotlivá řešení jsou různě obtížná, a každý žák si tak může najít „své" řešení odpovídající jeho znalostem (Hellmig, 2010).

Otevřené a polyvalentní úlohy v tomto příspěvku představím ve dvou podobách: jako slovní úlohy a jako obrázky ve formátu *Concept Cartoons.*

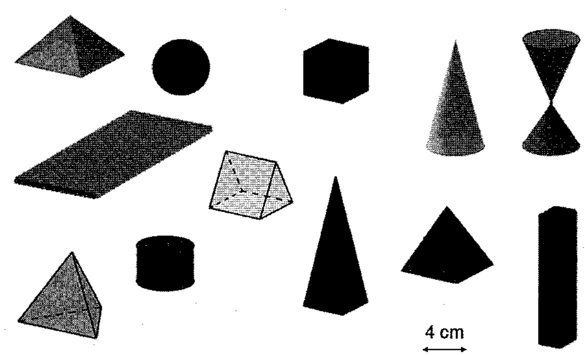
Otevřené a polyvalentní úlohy jako slovní úlohy

Otevřené a polyvalentní úlohy mohou svým zaměřením být geometrické i aritmetické. V tabulce 1 naleznete ukázky otevřených slovních úloh včetně rozboru jejich otevřenosti.

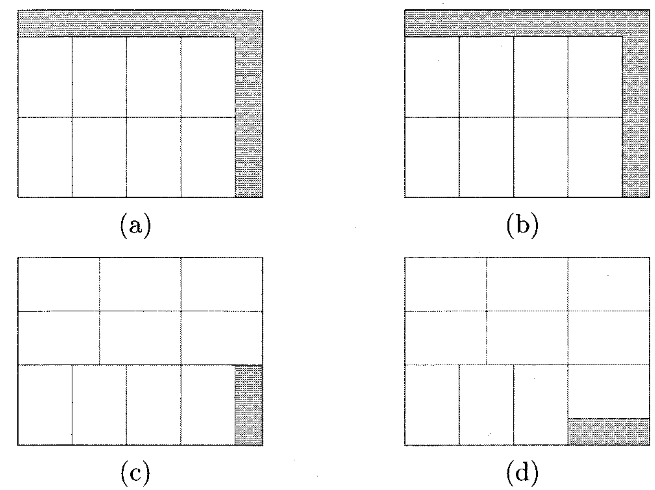
	Znění úlohy	**Otevřenost úlohy**
Ú1	Rozdíl dvou čísel je roven 2. Která jsou to čísla?	Vstupní situace je otevřená, není určen číselný obor; výsledná situace je otevřená, úloha má nekonečně mnoho řešení.
Ú2	Neznámé číslo bylo zaokrouhleno na hodnotu 5,6. Které je to číslo?	Vstupní situace je otevřená, není určena přesnost zaokrouhlování – zda na desetiny, setiny, tisíciny, ...; výsledná situace je otevřená, úloha má nekonečně mnoho řešení.
Ú3	Standa, Pepa a Karel mají průměrně 15 kuliček. Kolik kuliček má Standa a kolik Pepa, jestliže Karel má 25 kuliček?	Výsledná situace je otevřená, úloha má 21 řešení.
Ú4	Objem neznámého předmětu je 64 cm^3. Jak by tento předmět mohl vypadat?	Vstupní situace je otevřená, kromě objemu o předmětu nic nevíme; výsledná situace je otevřená, úloha má nekonečně mnoho řešení (např. geometrická tělesa na obr. 1).

Ú5	Děti budou vyrábět z barevného papíru pohlednice o rozměrech 15 cm a 10 cm.	
	(i) Kolik archů barevného papíru o rozměrech 45 cm a 35 cm musí paní učitelka koupit, je-li ve třídě 31 dětí a každé dítě má vyrobit jednu pohlednici?	Postup řešení je otevřený, existuje více způsobů, jak počet archů určit.
	(ii) Jak mají děti při vystřihování pohlednic postupovat?	Výsledná situace je otevřená, existuje více způsobů, jak pohlednice na arch rozložit (obr. 2).
	(iii) Kolik pohlednic mohou děti vyrobit z jednoho archu papíru?	Výsledná situace je otevřená, počet pohlednic může být různý.
	(iv) Jaký největší počet pohlednic mohou děti vyrobit z jednoho archu barevného papíru?	Postup řešení je otevřený, existuje více způsobů rozložení, při kterých je počet pohlednic maximální (např. obr. 2c a obr. 2d).

Tab. 1: Ukázky otevřených úloh a jejich charakteristik



Obr. 1: Různá geometrická tělesa o objemu 64 cm^3, měřítko vpravo dole



Obr. 2: Různá rozložení pohlednic na archu: (a) 8 kusů svisle; (b) 9 kusů vodorovně; (c), (d) 10 kusů kombinovaně; nevyužité části archu jsou vystínovány

Pěkným příkladem otevřené úlohy je úloha Ú5, která vychází ze stejné vstupní situace jako jedna z úloh uvedených u Nohdy (2000); já jsem tuto vstupní situaci obohatila o další otázky. Postup řešení u otázky (i) je otevřený, k určení počtu potřebných archů můžeme například využít geometrický postup založený na rozkreslení situace (P1), nebo aritmetický postup založený na odhadování (P2):

P1. Na obr. 2c, resp. 2d je vystínovaná plocha menší než plocha jedné pohlednice, tedy další pohlednice se už na arch nevejde a nepomůže ani přerovnání. Nejvyšší možný počet pohlednic na jednom archu je tudíž 10 a paní učitelka bude pro 31 dětí potřebovat 4 archy.

P2. Z výpočtu $(45 \cdot 35) : (15 \cdot 10) = 10{,}5$ plyne, že z jednoho archu nepůjde vyrobit více než 10 pohlednic, paní učitelka tedy musí koupit alespoň 4 archy. Delší rozměr pohlednice se do delšího rozměru archu vejde třikrát, kratší rozměr pohlednice se do kratšího rozměru archu vejde také třikrát, na jeden arch se tedy určitě vejde $3 \cdot 3 = 9$ pohlednic. Na čtyři archy se určitě vejde $4 \cdot 9 = 36$ pohlednic, a to pro 31 dětí stačí.

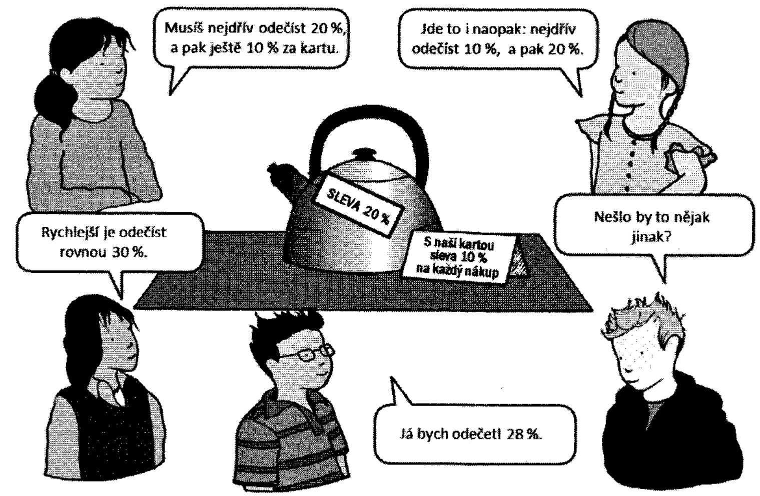
Výsledná situace u otázky (iii) je otevřená, řešení mohou být různá a je obtížné je klasifikovat, což bývá u prakticky založených otevřených úloh běžné, více (Koman & Tichá, 1997). Některá rozložení jsou jednoduchá na přípravu předlohy a stříhání, ale plýtvají papírem (obr. 2a), jiná jsou složitější, ale ušetří papír (obr. 2c, 2d).

Otevřené a polyvalentní úlohy ve formátu Concept Cartoons

Poněkud netradiční podobu otevřených a polyvalentních úloh umožňují tzv. *Concept Cartoons*, obrázky znázorňující „bublinový“ rozhovor několika dětí. Děti v bublinách uvádějí různé alternativní názory na zobrazenou situaci, přičemž některé názory jsou správné, některé nesprávné, někdy může být správnost podmíněná. Při práci s obrázky žáci obvykle odpovídají na otázku „Kdo na obrázku má pravdu a proč?“. Více podrobností o tomto formátu uvádí studie (Samková, 2016).

Na obrázku 3 je ve formě *Concept Cartoons* představena úloha zabývající se správným postupem výpočtu ceny po dvojí slevě (20 % sleva na varnou konvici, 10 % sleva na každý nákup). Názory uváděné v bublinách jsou různě obtížné, úloha je tedy polyvalentní:

- bublina vlevo nahoře uvádí obvyklé pořadí výpočtu výsledné ceny, z uvedených bublin je patrně nejjednodušší;
- pro bublinu vpravo nahoře je navíc potřeba vědět, že prohození pořadí slev nezmění výslednou cenu;
- bublina vlevo uprostřed uvádí asi nejčastější miskoncepci; někdy tento chybný názor mají i řešitelé, kteří správně reagovali na bubliny nahoře;
- bublina zcela dole je z celého obrázku nejobtížnější – uvádí ne zcela triviální správný názor, založený na sledu několika úvah a výpočtů.



Obr. 3: Úloha ve formátu Concept Cartoons; předloha převzata z Dabell et al. (2008, č. 2.3), upraveno, vlastní překlad

Závěrem

Hellmig ve svých pracích (např. 2010) definuje polyvalentní úlohy jen ve vztahu k různým různě obtížným řešením, ale rozbor úlohy Ú5(i) a úlohy na obrázku 3 ukazuje, že by rozhodně bylo účelné jako polyvalentní chápat i úlohy, které sice mají jen jedno řešení, ale k tomuto řešení vedou různé různě obtížné postupy řešení.

Otevřené a polyvalentní úlohy se nám osvědčují při matematickém vzdělávání budoucích učitelů 1. stupně ZŠ jako výuková i jako diagnostická pomůcka; více podrobností např. (Samková et al., 2016; Samková, 2016, 2018). Jejich možné využití je však mnohem širší, uplatnění naleznou na všech stupních škol. Zpočátku můžeme žáky nechat hledat různé postupy řešení a různá řešení, požádat je, aby své postupy a nalezená řešení zaznamenávali na tabuli. Po nějaké době přidáme také požadavek na nalezení všech řešení a na ověření, že žádná další řešení již neexistují.

Pro další příklady otevřených a polyvalentních úloh si dovolím odkázat na příspěvek (Samková, 2017), kde je velice podrobně rozebrána jedna geometrická polyvalentní úloha a kde jsou uvedeny odkazy na různé podobně zaměřené zdroje.

Literatura

[1] Dabell, J., Keogh, B. & Naylor, S. (2008). *Concept Cartoons in Mathematics Education* (CD-ROM). Sandbach: Millgate House Education.

[2] Hellmig, L. (2010). Effective 'blended' professional development for teachers of mathematics: Design and evaluation of the „UPOLA"-program. In *Proceedings of CERME 6* (1694–1703). Lyon: INRP.

[3] Koman, M. & Tichá, M. (1997). Jak v matematice zvládají žáci zkoumání situací z praxe. *Matematika – fyzika – informatika*, 7(1), 2–12.

[4] Nohda, N. (2000). Teaching by open-approach method in Japanese mathematics classroom. In *Proceedings of PME 24, Vol. 1* (39–53). Hiroshima: Hiroshima University.

[5] Pehkonen, E. (Ed.) (1997). *Use of open-ended problems in mathematics classroom.* Helsinki: Helsinki University.

[6] Samková, L. (2016). Didaktické znalosti obsahu budoucích učitelů 1. stupně základní školy před studiem didaktiky matematiky. *Scientia in educatione*, 7(2), 71–99. Dostupné z: `http://scied.cz/index.php/scied/article/viewFile/254/315`

[7] Samková, L. (2017). Badatelské úlohy ve vyučování matematice. In *Sborník 8. konference Užití počítačů ve výuce matematiky* (116–131). České Budějovice: Jihočeská univerzita. Dostupné z: `http://home.pf.jcu.cz/~upvm/2017/wp-content/uploads/2018/02/Sbornik_UPVM_2017.pdf`

[8] Samková, L. (2018). Uplatnění otevřeného přístupu k matematice v přípravě budoucích učitelů 1. stupně ZŠ – empirická studie v kontextu badatelsky orientovaného kurzu. *Studia Paedagogica*, 23(3), 49–67.

[9] Samková, L., Hošpesová, A. & Tichá, M. (2016). Role badatelsky orientované výuky matematiky v přípravě budoucích učitelů 1. stupně ZŠ. *Pedagogika*, 66(5), 549–569. Dostupné z: `http://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?p=11619&lang=cs`

Abstract

The contribution presents tasks that are open by open approach to mathematics, and their subtype called polyvalent tasks. On the basis of formal definitions of open and polyvalent tasks, the text introduces several illustrative examples, in the form of word problems and in the form of Concept Cartoons. Each illustrative example is accompanied by a brief analysis of its openness; one of the word problems and the Concept Cartoon are analysed in detail. Based on the presented analyses, I propose an extension of the definition of polyvalent tasks.

Libuše Samková
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice