DIM PaS 5

Barvení a kopírování

Obarvená množina – objekt $O = \langle X, \beta \rangle$, kde X je neprázdná nosná množina, $\beta : X \to B$ je zobrazení. B je množina barev, pro každé $x \in X$ nazýváme jeho obraz $\beta(x)$ **barvou prvku** při obarvení β.

Každé obarvení definuje na množině X **rozklad** na rozkladové třídy prvků stejné barvy.

Počet všech obarvení n – prvkové množiny ($|X| = n$) k barvami ($|B| = k$) je k^n.

Je rozdíl mezi **rozkladem** množiny a **obarvením** množiny. Při obarvení navíc záleží na tom, jaké barvy budou jednotlivým rozkladovým třídám přiřazeny.

Příklady:

1. Vlajka je tvořena třemi svislými barevnými pruhy. Máme k dispozici 5 barev: bílou, oranžovou, červenou, modrou a zelenou. Určete, kolik je možno vytvořit vlajek, jestliže:
   a) barvy se nesmí opakovat,
   b) pouze 1. a 3. pruh mohou, ale nemusí mít stejnou barvu.

Izomorfismus, automorfismus:

Říkáme, že dva objekty $\boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{O}_2$ s nosnými množinami $\boldsymbol{X}_1$ $\boldsymbol{X}_2$ jsou **izomorfní** ($\boldsymbol{O}_1 \cong \boldsymbol{O}_2$), jestliže existuje bijekce $\Phi : \boldsymbol{X}_1 \to \boldsymbol{X}_2$ taková, že $\boldsymbol{O}_2 = \Phi(\boldsymbol{O}_1)$ ((bijekce Φ (**izomorfismus**) zobrazuje tedy nejen vzájemně jednoznačně prvky $\boldsymbol{X}_1$ na prvky $\boldsymbol{X}_2$, ale také zachovává charakteristickou vlastnost objektu – tedy např. strukturu hypergrafu, relace, obarvené množiny – je to tzv. Φ - přenos.

Automorfismus objektu $\boldsymbol{O}$ - každý izomorfismus $\Phi : \boldsymbol{O} \to \boldsymbol{O}$.

Počet všech automorfismů objektu $\boldsymbol{O}$ značíme $\boldsymbol{aut}(\boldsymbol{O})$. Platí, že identita na nosné množině $\boldsymbol{X}$ je automorfismem, takže $1 \leq \boldsymbol{aut}(\boldsymbol{O}) \leq |\boldsymbol{X}|!$.

2. Ze všech 6 bijekcí množiny $\boldsymbol{X} = \{1,2,3\}$ na sebe určete ty bijekce, které jsou automorfismy zadaného objektu:

a) hypergraf $\boldsymbol{O}_1 = \langle \{\boldsymbol{X}; \{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}\rangle$,
b) hypergraf $\boldsymbol{O}_2 = \langle \boldsymbol{X}; \{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}\rangle$,
c) 2-uniformní hypergraf $\boldsymbol{O}_3 = \langle \boldsymbol{X}; \{\{1,2\}\}\rangle$,
d) 2-uniformní hypergraf $\boldsymbol{O}_4 = \langle \boldsymbol{X}; \{1,2\},\{2,3\},\{3,1\}\}\rangle$,
e) rozklad $\boldsymbol{O}_5 = \langle \boldsymbol{X}; \{\{1\},\{2\},\{3\}\}\rangle$,
f) binární relace $\boldsymbol{O}_6 = \langle \boldsymbol{X}; \{[1,2],[1,3]\}\rangle$,
g) binární relace $\boldsymbol{O}_7 = \langle \boldsymbol{X}; \{[1,2],[2,3],[3,1]\}\rangle$,
h) obarvená množina $\boldsymbol{O}_8 = \langle \boldsymbol{X}; \beta_1 \rangle, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$,

i) obarvená množina $\boldsymbol{O}_9 = \langle \boldsymbol{X}; \beta_2 \rangle, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$.

Počty automorfismů některých objektů:

(1) $\boldsymbol{O}$ je rozklad množiny $\boldsymbol{X}$ na neprázdné třídy typu $[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, ..., \boldsymbol{p}_n]$, potom

$$\boldsymbol{aut}(\boldsymbol{O}) = (1!)^{\boldsymbol{p}_1}\, \boldsymbol{p}_1 !.(2!)^{\boldsymbol{p}_2}\, \boldsymbol{p}_2 !...(\boldsymbol{n}!)^{\boldsymbol{p}_n}\, \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}} != \prod_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{i}!)^{\boldsymbol{p}_i} .\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{i}} !$$

(2) $\boldsymbol{O}$ je obarvená množina $\boldsymbol{X}$ pomocí $\boldsymbol{q}$ barev a čísla $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}}$ jsou po řadě velikosti jednotlivých jednobarevných tříd, potom

$$\boldsymbol{aut}(\boldsymbol{O}) = \boldsymbol{v}_1 !.\boldsymbol{v}_2 !....\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}} != \prod_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}} !$$

Obecná věta o počtu kopií:

Nechť $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ jsou stejně velké neprázdné množiny, $\boldsymbol{n}$ je počet jejich prvků, $\boldsymbol{O}$ je objekt s nosnou množinou $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{copy}(\boldsymbol{O})$ je počet všech možných kopií objektu $\boldsymbol{O}$ na množině $\boldsymbol{Y}$. Platí

$$\boldsymbol{copy}(\boldsymbol{O}) = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{aut}(\boldsymbol{O})}$$

3. Šest přátel (Petr, Pavel, Jan, Jiří, Olda, Karel) hrají hru Kámen, Nůžky, Papír. Kolik různých podob může mít jedno kolo hry, jestliže víme, že tři dali Papír, dva Kámen a jeden Nůžky?

4. Deset lidí má být ubytováno na pokojích číslo 201, 202, 203, 204, přičemž první dva pokoje jsou třílůžkové a další dva dvoulůžkové. Kolika způsoby to lze provést, jestliže:
    a) rozlišujeme i to, které přesně lůžko bude mít ten který člověk,
    b) rozlišujeme, kdo je na kterém pokoji, ale již ne na kterém lůžku v tomto pokoji,
    c) rozlišujeme pouze to, s kým student bydlí (na pokoji nezáleží).

5. Kolik různých slov lze vytvořit vzájemným přeskupováním písmen ve slově a) MISSISSIPPI, b) PROPORTION, c) SPOONS, d) TEEPEE?

6. Petr zakoupil 7 růží – 2 červené, 3 bílé a 2 žluté a chce jimi obdarovat Pavlu, Janu, Jiřinu, Alenu, Lenku, Evu a Olinu, každé dá 1 růži. Kolika způsoby to může udělat?

7. 18 studentů má býti dopraveno na místo jejich pobytu jedním mikrobusem (8 míst) čtyřmi osobními auty (dvě třímístná, jedno čtyřmístné). Před příjezdem vozidel se musí studenti rozdělit na příslušné skupiny. Kolika způsoby to mohou udělat?

8. Kolik čísel větších než 400 000 může vzniknout zpřeházením cifer v čísle 345 242.

9. 9 dětí hraje hru „Kolo kolo mlýnské“. Vytvořily kruh a drží se za ruce. Kolika způsoby lze děti rozmístit, záleží-li:
    a) nejen na tom, jaké má každé dítě sousedy, ale i na tom, jaké má sousedy vlevo a vpravo.
    b) na tom, jaké má dítě sousedy (je jedno, zda vlevo či vpravo).