DSM1 Cv 6

Zobrazení

Je dána relace $f : X \to Y$, $X_1 \subseteq X, Y_1 \subseteq Y$:

- Obraz množiny X_1 v relaci f,
  $f(X_1) = \{y \in Y; \exists x \in X_1 : [x, y] \in f\}$; v případě, že $X_1 = \{a\}$, píšeme $f(a)$ (obraz prvku a),
- Vzor množiny Y_1 v relaci f,
  $f^{-1}(Y_1) = \{x \in X; \exists y \in Y_1 : [x, y] \in f\}$; v případě, že $Y_1 = \{b\}$, píšeme $f^{-1}(b)$ (vzor prvku b)

Relaci $f : X \to Y$ nazveme **zobrazení** z množiny X do množiny Y, právě když **obrazem každého prvku $x \in X$ je právě jeden prvek $y \in Y$ ($\forall x \in X : |f(x)| = 1$).**

Důsledky definice:

- Z **každého prvku** množiny X smí vycházet jen **jedna šipka**,
- V **každém řádku** matice sousednosti zobrazení je **právě jedna jednička,**
- **Počet všech zobrazení z množiny X do množiny Y** je $|Y|^{|X|}$ (pokud $|X| = p, |Y| = q$, q^p).

Příklady:

1. Jsou dány množiny $X = \{1,2,3\}, Y = \{a, b\}$.
   a) Nakreslete všechna zobrazení z X do Y.
   b) Jaká je pravděpodobnost že náhodně vybraná relace z X do Y je zobrazení.
   c) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná tříšipková relace z X do Y je zobrazení.

2. Jsou dány množiny $\boldsymbol{X} = \{1,2,3,4\}, \boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ a zobrazení $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, kde $\boldsymbol{f} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$. Určete $\left| \boldsymbol{f}^{-1}\left(\boldsymbol{f}\left(\{3,4\}\right)\right)\right|$.

3. Množina $\boldsymbol{A}$ má 3 prvky a množina $\boldsymbol{B}$ 5 prvků. O kolik procent se zmenší počet všech zobrazení z $\boldsymbol{B}$ do $\boldsymbol{A}$, ubereme-li z $\boldsymbol{B}$ jeden prvek.

4. Pět přátel, Petr, Pavel, Jan, Jiří a Olda se podrobilo testu na salmonelózu. Kolik je možných výsledků testu? Kolik je možných výsledků testů, jestliže víme, že Petrův nález byl pozitivní?

5. Množina $\boldsymbol{X}$ má 3 prvky a množina $\boldsymbol{Y}$ má 2 prvky. O kolik procent se zvýší počet všech zobrazení z $\boldsymbol{X}$ do $\boldsymbol{Y}$, jestliže k $\boldsymbol{X}$ přidám 1 prvek?

6. V testu z biologie jsou u každé otázky nabídnuty 3 odpovědi: A, B, C. Je třeba zaškrtnout vždy jednu z nich. Kolik je způsobů zaškrtnutí u testu, obsahujícího 6 otázek?

Konstanta: zobrazení $k : X \to Y$, kde všechny prvky definičního oboru mají stejný obraz; $|k(X)| = 1$. Matice sousednosti konstanty má jeden sloupec, tvořený samými jedničkami. Počet všech konstant z X do Y je roven $|Y|$.

Injekce: zobrazení $f : X \to Y$, kde f je **prosté** zobrazení, tedy každé dva různé prvky z X mají dva různé obrazy. Platí $|f(X)| = |X|$. Matice sousednosti injekce má v každém sloupci nejvýše jednu jedničku. Pokud $|X| > |Y|$, pak neexistuje injekce z X do Y. Počet všech injekcí z X do Y je $\frac{|Y|!}{(|Y| - |X|)!}$, pokud $|X| \leq |Y|$.

Surjekce: zobrazení f množiny X **na** množinu Y; každý prvek z Y má aspoň jeden vzor z množiny X. Platí $f(X) = Y$. Matice sousednosti surjekce má v každém sloupci aspoň jednu jedničku. Pokud $|X| < |Y|$, pak neexistuje surjekce z X do Y. Počet všech surjekcí z X do Y je ($|X| = p$, $|Y| = q$):

$$q^p - \binom{q}{q-1}(q-1)^p + \binom{q}{q-2}(q-2)^p - \ldots + (-1)^{q-1}\binom{q}{1}1^p$$

Bijekce: zobrazení $f : X \to Y$, které je zároveň **injekcí a surjekcí** (**prosté** zobrazení množiny X **na** množinu Y – vzájemně jednoznačné zobrazení). Platí $f(X) = Y \wedge |X| = |Y|$. Matice sousednosti bijekce má v každém řádku a každém sloupci právě jednu jedničku. Pokud $|X| \neq |Y|$, bijekce z X do Y neexistuje. Počet všech bijekcí z X do Y je $|X|!$, pokud $|X| = |Y|$.

7. Jsou dány množiny ***X, Y*** a jejich potenční množiny $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y})$. Platí $|\boldsymbol{X}| = 3, |\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y})| = 4$. Určete:
   a) Počet všech zobrazení z ***X*** do ***Y,***
   b) Počet všech injekcí z ***Y*** do ***P(X)***,
   c) Počet všech konstant z ***X*** do ***Y***,
   d) Počet všech surjekcí z ***Y*** do ***P(X)***.

8. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraná 4-šipková relace z {1, 2, 3, 4} do {a, b} je surjekce.

9. Parkoviště má místa s čísly 1 až 8. Kolika způsoby lze zaparkovat černé, bílé, modré a žluté auto, pokud bílé auto nesmí stát na místě číslo1?

10. 10 dětí hraje hru, při jíž se rozdělí na 3 skupiny s tím, že v každé skupině musí být aspoň jedno dítě. Kolika způsoby to lze udělat?

11. Pět přátel Petr, Pavel, Jan, Jiří a Olda si koupilo 5 lístků do kina (vedle sebe). Kolika způsoby si mohou sednout a o kolik procent se tento počet zmenší, musí-li Olda sedět uprostřed?

12. Relace ***u, v*** jsou dány maticemi sousednosti $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Rozhodněte, zda ***u*** je či není injekce a zda $\boldsymbol{v}^{-1}$ je či není surjekce.

13. Jsou dány množiny $\boldsymbol{A} = \{1,2,3\}, \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}, \boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}\}$ a zobrazení $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}, \boldsymbol{g} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}, \boldsymbol{h} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ těmito předpisy:

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}, \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{z} \end{pmatrix}, \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{z} \end{pmatrix}.$$

U každé z daných rovnic určete všechny relace $\boldsymbol{x}$, které ji splňují.

a) $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$
b) $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}$
c) $\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$
d) $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}$
e) $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{g}^{-1}$
f) $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}$
g) $\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}$
h) $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}$
i) $\boldsymbol{f}^{-1} \circ \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{g}^{-1}$

14. Je dána množina $\boldsymbol{P} = \{1,2,3\}$ a zobrazení $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{g} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P}$, kde

$$\boldsymbol{f} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{g} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete relaci $\boldsymbol{h}$, která je řešením rovnice
a) $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{g}$, b) $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$, c) $\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{g}$ a určete ***h(3)***.

15. Jsou dány množiny ***M, N*** a víme, že počet konstant z ***M*** do ***N*** je 3 a počet konstant z ***N*** do ***M*** je 4. Označíme-li ***a*** počet zobrazení z ***M*** do ***N***, ***b*** počet surjekcí z ***N*** do ***M***, ***c*** počet bijekcí z ***N*** do ***N***. Uspořádejte čísla ***a, b, c*** podle velikosti.

16. V čísle 32561 můžeme libovolně měnit pořadí cifer. Určete, kolik sudých čísel tak dostaneme.