DM2E KONZ 3B

Vytvořující funkce

Vytvořující funkcí nekonečné posloupnosti $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ reálných čísel míníme **formální nekonečnou řadu** $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i$.

Příklady:

1) Platí: $f(x) = (1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$ (binomická věta). To znamená, že funkce $f(x) = (1+x)^n$ je vytvořující funkcí pro posloupnost $1, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots \binom{n}{n}, 0, 0, 0, \cdots$.

2) Platí: $g(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$ (součet prvních $n+1$ členů geometrické posloupnosti s prvním členem 1 a kvocientem x). To znamená, že funkce $g(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $\underbrace{1, 1, 1, \cdots, 1}_{n+1-krát}, 0, 0, \cdots$.

3) Platí $h(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ (součet nekonečné geometrické řady s prvním členem 1 a s kvocientem $x, |x| < 1$). To znamená, že funkce $h(x)$ je vytvořující funkcí nekonečné posloupnosti $1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots$.

4) Platí $k(x)=e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ (Maclaurinova řada pro funkci e^x). To znamená, že funkce $k(x)=e^x$ je vytvořující funkcí nekonečné posloupnosti $\frac{1}{0!},\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\cdots,\frac{1}{n!},\cdots$.

Poznámka: Uvedené řady chápeme jako formální výrazy, nezajímá nás jejich případná konvergence, zajímají nás koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné.

Operace s vytvořujícími funkcemi:

- **Součet, rozdíl, reálný násobek**: sčítáme, případně odčítáme příslušné koeficienty, případně násobíme koeficienty daným reálným číslem.
- **Součin**:

$$a(x)\cdot b(x)=\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots\right)\left(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots\right)=$$

$$=\left(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots\right),\text{ kde platí:}$$

$c_0=a_0b_0$, $c_1=a_0b_1+a_1b_0$, $c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$, atd. To znamená, že obě nekonečné řady postupně roznásobujeme. Při řešení konkrétní úlohy pracujeme pouze s konečnou částí vytvořující funkce (s konečnými mnohočleny).

Příklad: Počítáme $f(x)\cdot g(x)=\left(\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i\right)\left(\sum(-1)^i x^i\right)$.

Zajímají nás první 4 členy výsledné řady. Nahradíme tedy obě řady mnohočleny 3. stupně a roznásobíme:

$$\left(1+2x+3x^2+4x^3\right)\left(1-x+x^2-x^3\right)=$$
$$=1+x+2x^2+2x^3-3x^4+x^5-4x^6$$

Pozor: Vidíme, že u mocniny x^4 vychází pro nekonečnou řadu špatný koeficient, protože k jeho správné hodnotě přispívá ještě třeba součin $5x^4 \cdot 1$, který v našem mnohočlenu už nemáme. Musíme se tedy ve výsledné řadě omezit na první 4 členy, které jsou správně, případně zařadit do obou činitelů členy s vyššími mocninami, pokud to charakter úlohy vyžaduje.

Píšeme tedy $\left(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\right)\left(1-x+x^2-x^3+\ldots\right)=$

$$=1+x+2x^2+2x^3+\ldots$$

- **Podíl:** $\dfrac{a(x)}{b(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots=c(x)$**,** kde platí $a(x)=b(x)\cdot c(x)$.

Takže postupně počítáme: $a_0=b_0c_0 \Rightarrow c_0=\dfrac{a_0}{b_0}$, $a_1=b_0c_1+b_1c_0 \Rightarrow c_1=\dfrac{a_1-b_1c_0}{b_0}$ atd., (podle vzorců pro koeficienty v součinu).

Příklad: Opět nahradíme vytvořující funkce konečnými mnohočleny $\left(1+2x+3x^2+4x^3\right)$, $\left(1-x+x^2-x^3\right)$ a dělíme je podle předchozího pravidla (jedná se o jiný způsob dělení, nežli je dělení mnohočlenů se zbytkem). Vychází:

$$\frac{\left(1+2x+3x^2+4x^3\right)}{\left(1-x+x^2-x^3\right)}=1+3x+5x^2+7x^3+5x^4+7x^5+\ldots$$

Opět musíme dát pozor na to, že členy výsledného mnohočlenu, počínaje $5x^4$ už nejsou pro hledanou řadu použitelné, protože při dělení jsme již „nesepisovali“ z dělence příslušné (vynechané) mocniny.

Píšeme tedy: $\frac{\left(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\right)}{\left(1-x+x^2-x^3+\ldots\right)}=1+3x+5x^2+7x^3+\ldots$

Tento způsob dělení vytvořujících funkcí dává jako výsledek nekonečnou řadu i v případě dělení konečných mnohočlenů (pokud nejsou dělitelné beze zbytku).

Poznámka: pro konečný mnohočlen $a(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ platí $a(1)=a_0+a_1+\ldots+a_n$. Proto pro výpočet součtu všech koeficientů v daném polynomu stačí vypočítat jeho hodnotu pro $x=1$.

Příklady:

1. Jsou dány vytvořující funkce $f(x)=5+x+x^2$, $g(x)=2+x^2$, $p(z)=1+2z+3z^2$.

(a) Sestavte tyto vytvořující funkce: $2f(x)-3g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $p(g(x))$, $g(p(z))$, $f(2t)-p(-t)$

(b) najděte prvních pět členů vytvořujících funkcí: $f(x):g(x)$, $g(x):f(x)$.

Příklad: Máme k dispozici 4 jednokorunové, 4 dvoukorunové a 2 pětikorunové mince. Které částky se dají vyplatit těmito mincemi? Kolika způsoby můžeme vyplatit částku 14 korun?

1 Kč mincemi můžeme platit částky: 0/1zp, 1/1zp, 2/1zp, 3/1zp, 4/1zp. Posloupnost (1,1,1,1,1)

2 Kč mincemi můžeme platit částky: 0/1zp, 1/0zp, 2/1zp, 3/0zp, 4/1zp, 5/0zp, 6/1zp, 7/0zp, 8/1zp. Posloupnost (1,0,1,0,1,0,1,0,1)

5 Kč mincemi můžeme platit částky: 0/1zp, 1/0zp,…, 5/1zp, 6/0zp, …, 10/1zp. Posloupnost (1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1)

Těmto posloupnostem přiřadíme postupně vytvořující funkce:

$f_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$,

$f_2(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8$,

$f_3(x) = 1 + x^5 + x^{10}$.

Význam je ten, že například ve funkci $f_2(x)$ u členu x^6 udává exponent 6 částku, kterou chceme pomocí dvoukorun zaplatit a koeficient 1 počet způsobů, kterými to můžeme udělat (3 mince po 2 Kč).

Ptáme se, jak můžeme složit z daných mincí částku 14 korun. Musí platit: $14 = i_1 + i_2 + i_3$, kde $i_1 \in \{0,1,2,3,4\}$, $i_2 \in \{0,2,4,6,8\}$, $i_3 \in \{0,5,10\}$. Například: 14 = 0+4+10, 14 = 1+8+5, 14 = 2+2+10, 14 = 3+6+5, 14 = 4+0+10. Popisujeme vlastně způsob, jak vzniká při roznásobování našich mnohočlenů člen s exponentem 14.

Vypočítáme součin $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x)$, tedy „23-člen“, ve kterém koeficienty u jednotlivých členů udávají počet způsobů, kterými můžeme pomocí našich mincí zaplatit částky, které udává exponent u proměnné *x*. Například u mocniny x^{14} je koeficient 5, tedy částku 14 korun můžeme uvedenými mincemi zaplatit 5 způsoby. Počet všech

možností, jak můžeme zaplatit částky od 0 korun do 22 korun našimi mincemi se rovná součtu koeficientů u všech členů. Okamžitě tuto hodnotu zjistíme, když určíme hodnotu mnohočlenu pro $x=1$, tedy $f_1(1)\cdot f_2(1)\cdot f_3(1)=5.5.3=75$.

Příklady:

1. V cukrárně mají těsně před zavřením 4 kremrole, 3 větrníky, 3 punčové řezy a 2 rakvičky. Kolika způsoby může zákazník

(a) koupit 7 zákusků,

(b) koupit 7 zákusků, chce-li maximálně 2 větrníky a aspoň 2 kremrole,

(c) nakoupit 7 zákusků, mají-li všeho dostatek?

Návod na řešení:

(a) sestavíme vytvořující funkce pro jednotlivé druhy zákusků:

$f_k(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$ (pro kremrole)

$f_v(x)=1+x+x^2+x^3$ (pro větrníky)

$f_p(x)=1+x+x^2+x^3$ (pro punčové řezy)

$f_r(x)=1+x+x^2$ (pro punčové řezy)

Vypočteme vytvořující funkci $f_k(x)\,f_v(x)\,f_p(x)\,f_r(x)$, což je mnohočlen stupně 12. V něm nás zajímá koeficient u členu x^7.

(b) vytvoříme modifikované vytvořující funkce, odpovídající podmínkám:

$\overline{f}_k(x)=x^2+x^3+x^4$, $\overline{f}_v(x)=1+x+x^2$, zbývající dvě ponecháme beze změny. Opět vytvoříme součin $\overline{f}_k(x)\,\overline{f}_v(x)\,f_p(x)\,f_r(x)$, v něm nás zajímá opět koeficient u členu x^7.

(c) Máme-li dostatek zákusků všech druhů, jedná se o kombinace $k = 7$ třídy z prvků $n = 4$ druhů s opakováním. Jejich počet je $\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{10}{3} = 120$.

2. Kolika způsoby můžeme zaplatit přesně 17 Kč, máme-li k dispozici

(a) 7 korunových mincí, 4 dvoukoruny a 4 pětikoruny,

(b) libovolné množství jedno, dvou a pětikorunových mincí?

3. V květinářství mají rudé, bílé, růžové, žluté, fialové a žíhané karafiáty, od každé barvy 3 kusy. Kolik je možností nákupu 5 karafiátů?

4. V květinářství mají 4 červené, 5 bílých a 10 růžových růží.

(a) Určete počet způsobů, jak koupit 11 růží,.

(b) Jak se změní výsledek úlohy (a), je-li všech růží, (i těch, které máme koupit) 5-krát větší?

(c) Jak se změní výsledek úlohy (a), mají-li od všech barev aspoň 11 kusů.

5. Kolika způsoby můžeme rozdat 4 dětem, Petrovi, Pavlovi, Lauře a Janě, 10 úplně stejných míčů, jestliže každá dívka musí dostat aspoň jeden míč a každý chlapec nejvýše tři?