MATA P3-2

<u>Vektorový prostor nad tělesem *R*</u>

Definice:

<u>*Vektorovým prostorem nad tělesem reálných čísel* ***R***</u> nazýváme neprázdnou množinu ***V*** **(její prvky nazýváme vektory)**, ve které jsou definovány dvě operace - **sčítání vektorů a násobení vektorů reálnými čísly**, přičemž platí:

a) ***V*** **je uzavřenou množinou vůči oběma operacím** (tj. výsledky obou operací jsou prvky ***V***).

b) pro libovolné prvky $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \boldsymbol{V}$ a libovolná čísla $\alpha,\beta \in \boldsymbol{R}$ platí:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$,
- $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$,
- $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$,
- $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$,
- $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$,
- $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$

c) ***V*** obsahuje tzv. <u>*nulový prvek*</u> **o**, který má tu vlastnost, že $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$ pro libovolné $\mathbf{u} \in \boldsymbol{V}$ (**o** nazýváme **nulový vektor**).

d) Ke každému prvku $\mathbf{u} \in \boldsymbol{V}$ existuje tzv. <u>*opačný prvek*</u> $-\mathbf{u}$, pro který platí, že $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$ (vektor $-\mathbf{u}$ nazýváme **opačný vektor** k vektoru u).

Problém: Rozhodněte, zda jsou vektorovým prostorem následující množiny spolu s příslušnými operacemi:

- *Množina všech n-rozměrných aritmetických vektorů* $\boldsymbol{R}^n$ *s operací sčítání vektorů a násobení vektorů reálným číslem.*

- *Množina všech volných vektorů v n-rozměrném euklidovském bodovém prostoru (množina všech vektorů* $\boldsymbol{u} = B - A$ *s operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem známými ze střední školy).*

- *Množina všech přirozených čísel s příslušnými operacemi.*

- *Množina všech reálných čísel s příslušnými operacemi.*

- *Množina* $\boldsymbol{P}$ *všech reálných polynomů spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomů reálným číslem.*

- *Množina všech reálných funkcí reálné proměnné definovaných na intervalu* $\langle a,b \rangle$.

Podprostor vektorového prostoru.

Definice: Neprázdnou podmnožinu $\boldsymbol{W}$ vektorového prostoru $\boldsymbol{V}$ nazýváme ***podprostorem*** $\boldsymbol{V}$, je-li sama o sobě také vektorovým prostorem se stejnými operacemi jako jsou definovány ve $\boldsymbol{V}$ (značíme $\boldsymbol{W} \subseteq\subseteq \boldsymbol{V}$).

Věta: $\boldsymbol{W}$ **(**$\boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{V}$ **,** $\boldsymbol{W} \neq \emptyset$**) je podprostorem** $\boldsymbol{V}$ $(\boldsymbol{W} \subseteq\subseteq \boldsymbol{V})$, právě když pro každé dva prvky **u, v** $\in$ $\boldsymbol{W}$ a pro každé reálné číslo α platí, že $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W} \wedge \alpha.\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}$ (tedy je-li $\boldsymbol{W}$ uzavřenou množinou vůči operacím sčítání prvků a násobení prvků reálnými čísly).

Příklady:

1. Uvažujme množiny $\boldsymbol{W}_1 \subseteq \boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{W}_2 \subseteq \boldsymbol{R}^3$: $\boldsymbol{W}_1$ = {(x, y, z); -3x + 7y + 2z = 0}, $\boldsymbol{W}_2$ = {(x, y, z); 5x + y – z + 3 = 0}. Ověřte, zda tyto množiny jsou podprostory vektorového prostoru $\boldsymbol{R}^3$.

2. Uvažujte vektorový prostor $\boldsymbol{R}^3$. Rozhodněte, zda následující množiny jsou podprostory $\boldsymbol{R}^3$. Množina všech ($\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{x}_3$), kde:

   - $\boldsymbol{x}_1$ je celé číslo,
   - $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = 0$,
   - $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = 2$.

3. Uvažujte vektorový prostor $\boldsymbol{P}_4$ všech polynomů nejvýše 4. stupně. Rozhodněte, zda následující množiny jsou podprostory tohoto vektorového prostoru. Všechny polynomy:

   - právě 3. stupně.
   - f takové, že $2.f(0) = f(1)$,
   - f takové, že pro všechna x platí $f(x) = f(-x)$.

Lineární kombinace vektorů.

<u>*Lineární kombinací*</u> vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ s koeficienty $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ nazýváme vektor $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n$.

Lineární závislost vektorů.

Vektory $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ nazýváme <u>*lineárně závislé*</u>, existují-li koeficienty $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, z nichž alespoň jeden je různý od nuly a přitom platí: $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{o}$. Vektory, které nejsou lineárně závislé, se nazývají <u>*lineárně nezávislé*</u>.

Věta: Vektory $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé, právě když rovnice $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{o}$ má jediné řešení $\alpha_1 = 0, \cdots, \alpha_n = 0$.

Důsledek: Je-li některý z vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ lineární kombinací ostatních (speciálně, je-li některý z nich nulový), jsou vektory $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ lineárně závislé.

Dimenze a báze vektorového prostoru.

Existuje-li ve vektorovém prostoru ***V*** skupina *n* lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ a každá skupina více než *n* vektorů je lineárně závislá, pak říkáme, že ***V*** má <u>*dimenzi*</u> *n* (nebo že vektorový prostor ***V*** je <u>*n-rozměrný*</u>).

<u>*Bází*</u> *n*-rozměrného vektorového prostoru ***V*** nazýváme jakoukoliv lineárně nezávislou skupinu *n* vektorů z ***V***.

Je-li $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ skupina lineárně nezávislých prvků vektorového prostoru ***V***, pak množina všech lineárních kombinací těchto prvků je podprostorem ***V***. Říkáme, že prvky $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ tento podprostor <u>*generují*</u> (jsou jeho *množinou generátorů*).

Příklady:

4. Jsou dány tři vektory z vektorového prostoru $\boldsymbol{R}^3$. Rozhodněte, zda jsou lineárně závislé či nezávislé.

   - $\boldsymbol{u} = (1,2,3), \boldsymbol{v} = (1,0,2), \boldsymbol{w} = (-1,4,0)$,
   - $\boldsymbol{u} = (1,2,3), \boldsymbol{v} = (3,-1,2), \boldsymbol{w} = (4,-6,2)$.

5. Uvažujte vektorový prostor polynomů stupně nejvýše 2 na ***R*** a v něm tři polynomy ***f, g, h***, zadané těmito vzorci pro všechna reálná x: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x} + 2, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 3, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2 + 2$. Rozhodněte, zda jsou tyto polynomy lineárně závislé či nezávislé.
6. Předpokládejte, že vektory ***u, v, w*** jsou lineárně nezávislé. Zjistěte, pro které reálné číslo *a* jsou vektory ***a*** = *3****u*** – ***v***, ***b*** = ***u*** + *5****v*** – *2****w***, ***c*** = ***v*** + *a*.***w*** lineárně závislé.
7. Určete, zda vektory ***x, y, z*** tvoří bázi vektorového prostoru $\boldsymbol{R}^3$ a v kladném případě určete souřadnice vektoru ***a*** = (1, 2, 3) vzhledem k této bázi:

   - ***x*** = (3, 0, 1), ***y*** = (1, 2, 1), ***z*** = (1, 1, 1),
   - ***x*** = (1, 1, 2), ***y*** = (3, 2, 4), ***z*** = (-2, -1, -2).