

## SZZ — Matematika se zaměřením na vzdělávání

Čas: 120 minut. Pomůcky: papír, tužka a vlastní hlava.  
Je třeba získat minimálně 50 bodů.

### Část I — Algebra

**1** (15 bodů) Dokažte, že zlomek

$$\frac{7^n + 1}{3^n + 1},$$

kde  $n$  je liché přirozené číslo, lze vždy krátit číslem 4.

**2** (15 bodů) Rozhodněte, zda je vektor  $\vec{b} = (1, 2, -3, -1)$  lineární kombinací vektorů  $\vec{a}_1 = (-2, 1, 0, 0)$ ,  $\vec{a}_2 = (1, 1, -1, -1)$ ,  $\vec{a}_3 = (3, -1, -1, 0)$ . Pokud ano, určete koeficienty této lineární kombinace.

### Část II — Geometrie

**1** (15 bodů) Pro body  $A = [1, -1, 0]$ ,  $B = [0, 3, -2]$ ,  $C = [2, 0, 1]$  vypočtete obsah trojúhelníku  $ABC$  a napište rovnici roviny  $\rho$ , která je jimi určena.

**2** (15 bodů) Napište rovnice tečen vedených z počátku soustavy souřadnic ke kuželosečce o rovnici

$$x^2 - 4xy - y^2 + 4x + 1 = 0.$$

### Část III — Matematická analýza

**1** (10 bodů) Určete limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}.$$

**2** (10 bodů) Určete

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x \, dx.$$

**3** (10 bodů) Určete lokální extrémy funkce

$$F(x, y) = x + y - \ln xy.$$

**4** (10 bodů) Rozhodněte o konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n} + n^2 + 3}.$$